

## SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

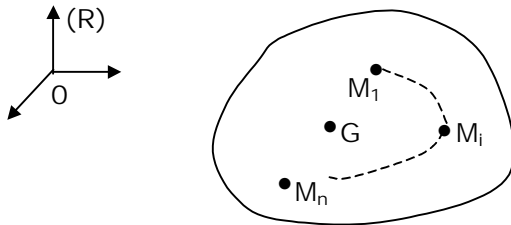
I. Théorèmes généraux (en référentiel galiléen)..... 1  
 II. Cas particulier : système isolé de deux points matériels en interaction..... 6  
 III. Choc de deux points matériels..... 15

\*\*\*\*\*

### I. Théorèmes généraux (en référentiel galiléen).

On considère un système de n points matériels  $M_i$  de masse  $m_i$ , en mouvement par rapport à (R) galiléen.

#### I.1. Théorème du centre de masse (TCM).



Le centre de masse (ou d'inertie) G du système est le barycentre des  $(M_i, m_i)$  :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i}{m} \quad (m = \sum_{i=1}^n m_i) \quad (\text{ou : } \sum_{i=1}^n m_i \vec{GM}_i = \vec{0})$$

Appliquons la RFD au point  $M_i$  :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \underbrace{\vec{f}_i \text{ (ext)}}_{\substack{\text{somme des forces} \\ \text{exercées sur } M_i \\ \text{par des points} \\ \text{extérieurs au système}}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}}_{\substack{\text{forces exercées} \\ \text{par } M_{j \neq i}}}$$

En sommant les RFD appliquées à chaque point  $M_i$ , on obtient :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{m \vec{a}_G} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{f}_i \text{ (ext)}}_{\vec{F}_{\text{ext}}} + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i} \right)$$

(résultante des forces extérieures au système)

D'après le principe des actions réciproques :

$$\vec{f}_{j \rightarrow i} = - \vec{f}_{i \rightarrow j} \quad , \quad \text{donc :}$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i} \right) = \vec{0}$$

Ainsi :

$$m \vec{a}_G = \vec{F}_{\text{ext}} \quad (\text{TCM ou TCI})$$

 Pour un système isolé :  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0}$  : G est en T R U

### I.2. Théorème du moment cinétique.

Le moment cinétique en A du système matériel, évalué dans (R), défini par :

$$\vec{\sigma}(A) = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

Alors :

$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{a}_i + \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_A) \wedge m_i \vec{v}_i$$

Avec :

$$m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i(\text{ext}) + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}}_{\vec{f}_i(\text{int})}$$

On peut montrer que :

$$\sum_i \vec{AM}_i \wedge \left( \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i} \right) = \vec{0} \quad (\text{d'après le principe des actions réciproques}).$$

Ainsi :

$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \vec{m}^t(A) \left( \sum \vec{F}_{\text{ext}} \right) - \vec{v}_A \wedge m \vec{v}_G \quad (\text{TMC en A})$$

En particulier, si A est fixe, ou A=G :

$$\vec{v}_A \wedge m \vec{v}_G = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{m}^t(G) \left( \sum \vec{F}_{\text{ext}} \right) \quad (\text{TMC en G})$$

Rem. 1 : il faut prendre garde à ne pas écrire :  $\vec{\sigma}(A) = \vec{AG} \wedge m \vec{v}_G$

 En effet, si  $(R_G)$  est le référentiel barycentrique du système :


$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\sigma}(A) = \underbrace{\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_i}_{\vec{\sigma}^*(A)} + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_G}_{\overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}_G} \\ \vec{\sigma}(G) = \vec{\sigma}^*(G) = \vec{\sigma}^*(A) = \vec{\sigma}^* \end{cases}$$

Donc :

$$\vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}^*}_{\text{moment cinétique barycentrique}} + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}_G$$

moment cinétique barycentrique

Ce résultat, connu sous le nom de théorème de Koenig pour le moment cinétique, sera très utilisé en mécanique du solide.

Rem. 2 : d'après la remarque 1 :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{m}^t(G) \left( \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \right)$$

(TMC en G dans  $(R_G)$ , appelé aussi TMC barycentrique).

Rem. 3 : Pour un système isolé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\sigma}^* = \text{cste} \\ \text{et } \vec{\sigma}(O) = \text{cste}, \text{ si } O \text{ fixe} \end{array} \right.$$

### 1.3. Théorèmes énergétiques.

On peut écrire :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \underbrace{\vec{f}_i}_{\text{(int + ext)}}$$

Somme de toutes les forces exercées sur  $M_i$ , intérieures et extérieures au système

D'où :

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i \quad (\text{int + ext})$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i \quad (\text{int + ext})$$

Or :

$$E_C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Donc on obtient :

$$\frac{dE_C}{dt} = \underbrace{P}_{\text{(int + ext)}} \quad (\text{TPC})$$

Puissance de toutes les forces (int + ext) exercées sur le système

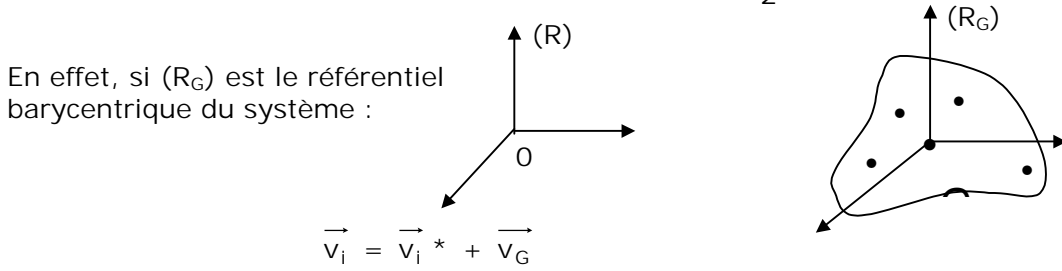
$$\begin{aligned} dE_C &= \delta W \text{ (int + ext)} \\ \Delta E_C &= W \text{ (int + ext)} \end{aligned} \quad (\text{TEC})$$

SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

Enfin, en posant :  $E_m = E_C + E_P$  (int + ext)  
 l'énergie potentielle doit dériver toutes les forces exercées sur les divers  $M_i$

$$dE_m = \delta W_{NC} \text{ (int + ext)} \quad \text{(TEM)}$$

Rem. 1 : il faut prendre garde à ne pas écrire que  $E_C = \frac{1}{2} m v_G^2$



$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$$

Donc

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G)^2$$

$$\Rightarrow E_C = \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{2*}}_{E_C^*} + \frac{1}{2} m v_G^2 + \underbrace{(\sum m_i \vec{v}_i^*) \cdot \vec{v}_G}_{m \vec{v}_G^* = \vec{0}}$$

Finalement :

$$E_C = E_C^* + \frac{1}{2} m v_G^2$$

: ce résultat, connu sous le nom de théorème de

Koenig pour l'énergie cinétique, sera très utilisé en mécanique du solide.

Rem. 2 : pour un système de n points :

$$\sum \vec{F} \text{ (int)} = \vec{0} \quad , \quad \text{mais} \quad \delta W \text{ (int)} \neq 0$$

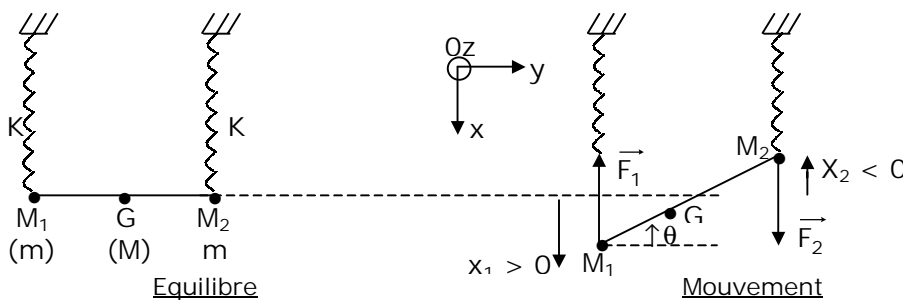
En effet, pour 2 points i et j :

$$\delta W \text{ (int)} = \vec{f}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{v}_j dt + \vec{f}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_i dt$$

$$\vec{f}_{i \rightarrow j} = - \vec{f}_{j \rightarrow i} \quad , \quad \text{donc :}$$

$$\delta W \text{ (int)} = \vec{f}_{i \rightarrow j} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) dt \neq 0$$

**1.4. Exemple** : couplage par inertie de deux pendules élastiques



## SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

- TCM au système  $\{M_1, M_2\}$ , en projection sur  $\vec{x}$  :

$$(2m + M) \overset{\circ\circ}{x}_G = -Kx_1 - Kx_2$$

(Les poids compensent les tensions à l'équilibre, et n'interviennent pas dans l'équation du mouvement, si on compte  $x_1$  et  $x_2$  par rapport à l'équilibre).

Avec  $x_G = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , on obtient la 1<sup>ère</sup> équation :

$$\overset{\circ\circ}{x}_1 + \overset{\circ\circ}{x}_2 = \frac{-K}{m + M/2} (x_1 + x_2) \quad (1)$$

- TMC barycentrique au système  $\{M_1, M_2\}$ , en projection sur  $\vec{y}$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_z^*}{dt} &= (\overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{F_2}) \cdot \vec{z} \\ &= -Kx_1 \frac{\ell}{2} \cos \theta + Kx_2 \frac{\ell}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

Avec :

$$\vec{\sigma}^* = (\overrightarrow{GM_1} \wedge m\vec{v}_1^*) + (\overrightarrow{GM_2} \wedge m\vec{v}_2^*)$$

$$\sigma_z^* = 2m \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 \overset{\circ}{\theta} = \frac{m\ell^2}{2} \overset{\circ}{\theta}$$

De plus :

$$\sin \theta = \frac{x_1 - x_2}{\ell}$$

Pour de petites oscillations du système :

$$\begin{cases} \cos \theta \approx 1 \\ \sin \theta \approx \theta \end{cases}$$

Ainsi :

$$\frac{m\ell}{2} (\overset{\circ\circ}{x}_1 - \overset{\circ\circ}{x}_2) \approx -K(x_1 - x_2) \frac{1}{2}$$

Soit :

$$\overset{\circ\circ}{x}_1 - \overset{\circ\circ}{x}_2 = \frac{-K}{m} (x_1 - x_2)$$

Posons

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m + M/2} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{K}{m}$$

Alors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_1 - x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont donnés par les conditions initiales  $x_{10}, x_{20}, \overset{\circ}{x}_{10}$  et  $\overset{\circ}{x}_{20}$ .

On voit donc que  $x_1$  et  $x_2$  sont des combinaisons linéaires de 2 « modes propres » d'oscillation, l'un à la pulsation  $\omega_1$ , l'autre à la pulsation  $\omega_2$ .

$\omega_1$  et  $\omega_2$  sont appelées pulsations propres du système couplé.

- Si  $x_{10} = x_{20} = x_0$  ;  $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

On trouve :  $x_1(t) = x_2(t) = x_0 \cos \omega_1 t$  ,  $\forall t$

Les 2 éléments oscillent en phase à la pulsation  $\omega_1$ .

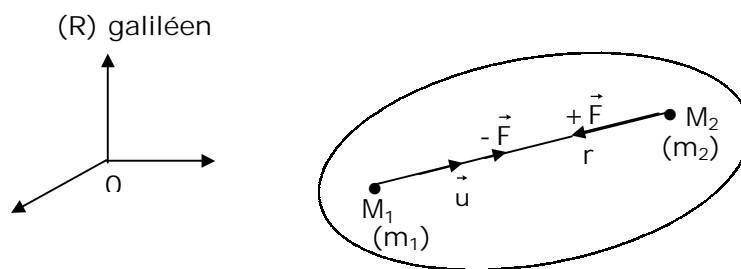
- Si  $x_{10} = -x_{20} = x_0$  ;  $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

On trouve :  $x_1(t) = -x_2(t) = x_0 \cos \omega_2 t$  ,  $\forall t$

Les 2 éléments oscillent en opposition de phase à la pulsation  $\omega_2$ .

## II. Cas particulier : système isolé de deux points matériels en interaction.

### II.1. Etude générale.



On considère le système  $\{M_1, M_2\}$  isolé.

On pose  $M_1M_2 = r$  ;  $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} = r\vec{u}$

On suppose que les deux points sont en interaction par l'intermédiaire d'une force ne dépendant que de  $r$  :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{F}(r) = F(r) \vec{u}$$

$$\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = -\vec{F}(r)$$

$(F(r) > 0$  : répulsion ;  $F(r) < 0$  : attraction)

Soit G le centre d'inertie du système.

Il est défini par :  $m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$

Par application du TCM au système, dans (R) galiléen, on a :

$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$$

Donc  $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cste}$  : (R<sub>G</sub>) est alors galiléen

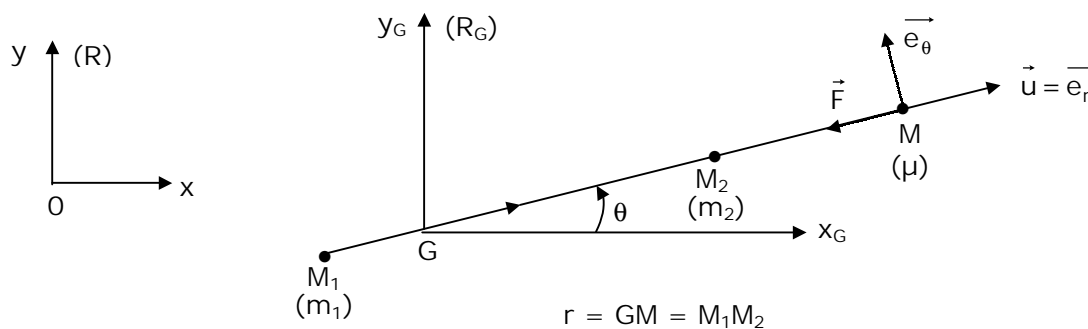
L'étude du système se fera alors dans (R<sub>G</sub>).

Soit un point  $M$ , appelé « mobile fictif » (ou « particule réduite ») tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} \\ M \text{ a pour masse } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{masse réduite}) \\ M \text{ est soumis à } \vec{F} = F(r) \vec{u} \end{array} \right.$$

Dans  $(R_G)$ ,  $M$  est donc soumis à la force centrale  $\vec{F}$ . Toutes les propriétés vues dans le chapitre VIII s'appliquent alors.

En particulier, si la force est newtonienne,  $M$  décrit dans  $(R_G)$  une conique dont  $G$  est un foyer, selon la loi des aires.



Par application de la RFD, ou du TEM, on connaît donc  $\overrightarrow{GM} = \vec{r}$ .

Puis :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = 0 \\ \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{array} \right.$$

La connaissance de  $\overrightarrow{GM}$  permet donc ensuite de déterminer  $\overrightarrow{GM_1}$  et  $\overrightarrow{GM_2}$  (trajectoires de  $M_1$  et  $M_2$  dans  $(R_G)$ ).

Mais nous avons vu en VII que les équations du mouvement de  $M$  dans  $(R_G)$  font intervenir 2 grandeurs constantes, déterminées par exemple à l'aide des conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\sigma}^*(M) = \sigma_0^* \quad \text{moment cinétique barycentrique du point M} \\ E^* = E_0^* \quad \text{énergie barycentrique du point M} \end{array} \right.$$

Montrons que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\sigma}^*(M) = \vec{\sigma}^* \{M_1 + M_2\} \\ E_C^*(M) = E_C^* \{M_1 + M_2\} \end{array}}$$

Ainsi, la trajectoire de M dans  $R_G$  dépendra de conditions initiales imposées aux points  $M_1$  et  $M_2$ .

$$\text{On a en effet : } \begin{cases} \vec{\sigma}^* (M_1 + M_2) = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^* \\ \vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_G ; \vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{v}_G \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}^* (M_1 + M_2) = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 - \underbrace{(m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2})}_{\vec{0}} \wedge \vec{v}_G$$

$$\text{Soit : } \vec{\sigma}^* (M_1 + M_2) = -\mu \vec{r} \wedge \vec{v}_1 + \mu \vec{r} \wedge \vec{v}_2 = \mu \vec{r} \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\text{Comme } \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M_1 M_2}) = \left( \frac{d \overrightarrow{GM}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d \overrightarrow{GM}}{dt} \right)_{R_G} = \vec{v}^* (M)$$

$$\text{On a bien : } \vec{\sigma}^* (M_1 + M_2) = +\mu \vec{r} \wedge \vec{v}^* (M) = \vec{\sigma}^* (M)$$

- $E_C^* (M_1 + M_2) = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \vec{v}_1^* = \left( \frac{d \overrightarrow{GM_1}}{dt} \right)_R = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}^* (M) \\ \vec{v}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}^* (M) \end{cases}$$

$$\text{D'où : } E_C^* (M_1 + M_2) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v^{*2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^{*2}$$

On a donc bien également :

$$E_C^* (M_1 + M_2) = \frac{1}{2} \mu v^{*2} = E_C^* (M)$$

### Energie potentielle « efficace » (ou « effective »)

Une méthode possible pour la détermination de la trajectoire de M dans ( $R_G$ ) est la méthode énergétique :

$$E_C^* (M) + E_p = \text{cste} = E_0^*$$

$$\text{Avec aussi : } \sigma^* = \text{cste} = \mu r^2 \overset{0}{\theta}$$

On peut donc écrire :

$$\frac{1}{2} \mu (r \overset{0}{\dot{r}}^2 + r^2 \overset{0}{\dot{\theta}}^2) + E_p(r) = E_0^*$$



En éliminant  $\dot{\theta}$  à l'aide de  $\sigma^*$ , on tire :

$$\frac{1}{2} \mu r \dot{\sigma}^2 = E_0^* - E_{\text{Peff}}(r)$$

Avec :

$$E_{\text{Peff}}(r) = E_p(r) + \frac{\sigma^{*2}}{2 \mu r^2}$$

Cette énergie potentielle « effective », ou « efficace » permet de se ramener au cas d'un mouvement unidimensionnel pour le point M : tout se passe comme si M avait une trajectoire rectiligne de vitesse  $\dot{\sigma}$ , à condition de remplacer  $E_p$  par  $E_{\text{Peff}}$ .

On peut alors discuter graphiquement la nature de la trajectoire en représentant  $E_{\text{Peff}}(r)$  :

$$r \geq 0 \text{ impose } E_{\text{Peff}}(r) \leq E_0^* \quad (\text{cf 2) et 3))$$

Cas particulier :  $m_1 \gg m_2$

Alors :

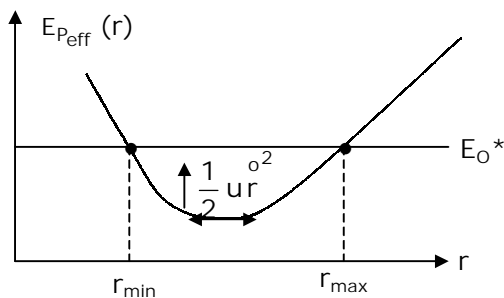
$$\begin{cases} G \approx M_1 \\ M \approx M_2 \\ \mu \approx m_2 \end{cases}$$

et, on étudie le mouvement de  $M_2$  autour de  $M_1$ .

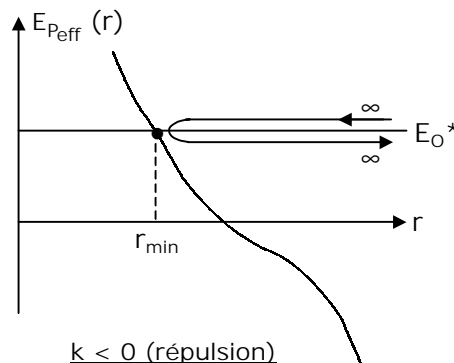
### II.2. Cas où $F(r) = -kr$

- Discussion graphique :

$$\begin{cases} E_p(r) = \frac{1}{2} kr^2 \\ E_{\text{Peff}}(r) = \frac{1}{2} kr^2 + \frac{\sigma^{*2}}{2 \mu r^2} \end{cases}$$



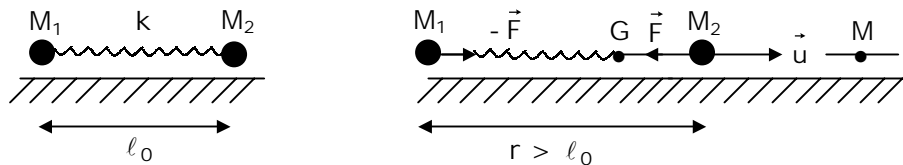
$k > 0$  (attraction)



$k < 0$  (répulsion)

- Si  $k > 0$ , on dit que l'état est « lié » car  $r = M_1M_2$  reste borné (la trajectoire de M est en fait une ellipse de centre G ; cf 7.2).

- Si  $k < 0$ , on parle d'état « diffusif », car  $r$  n'est pas borné :  $M$ , venant de l'infini, s'approche de  $G$  à  $r_{\min}$ , puis « diffuse » à l'infini (la trajectoire de  $M$  est ici une branche d'hyperbole de centre  $G$  ; cf 7.2).
- Exemple : système de 2 masses ponctuelles liées par un ressort de raideur  $k$ , glissant sans frottement sur un plan horizontal (système « pseudo-isolé »).



$$F(r) = -k(r - \ell_0) = -kr'$$

En supposant le mouvement rectiligne selon  $\vec{u}$  :

$$E_0^* = \frac{1}{2} \mu r'^2 + \frac{1}{2} k r'^2 = \text{cste}$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\vec{GM} = \vec{r} = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \vec{u}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Puis :

$$\begin{cases} \vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{GM}_2 = +\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases}$$

Les valeurs de  $A$  et  $\varphi$  dépendent des conditions initiales :

$$\text{à } t = 0, \begin{cases} r = r_0 : r(t) = r_0 \cos \omega_0 t \\ \dot{r} = 0 \end{cases}$$

Alors

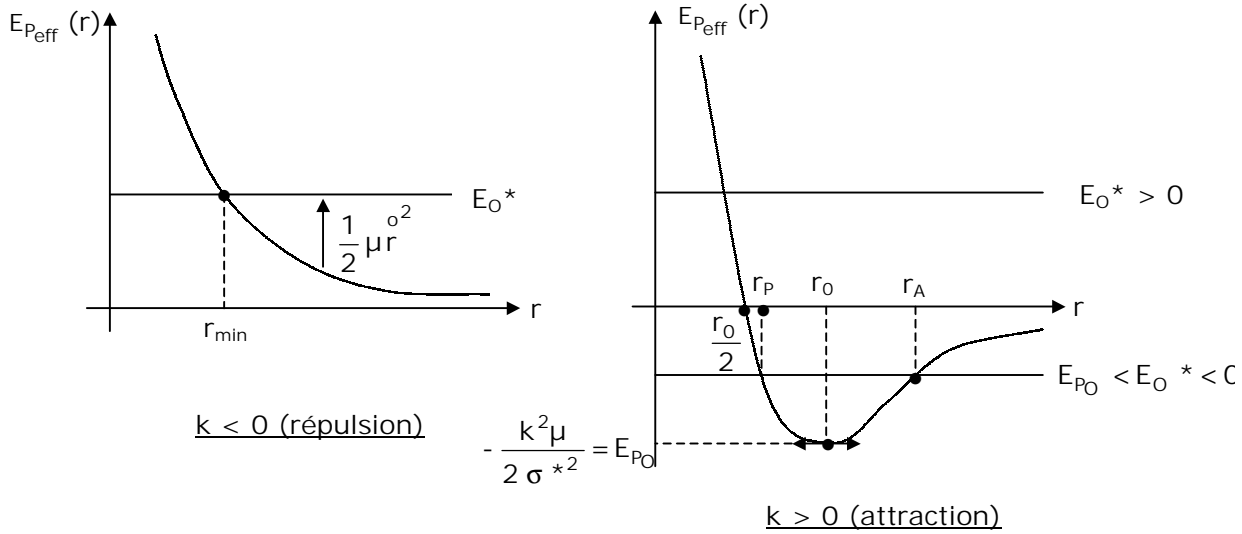
$$\begin{cases} \vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0 \cos \omega_0 t \\ \vec{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_0 \cos \omega_0 t \end{cases} : \text{ dans } (R_G),$$

$M_1$  et  $M_2$  oscillent en opposition de phase à la pulsation  $\omega_0$ .

### II.3. Cas où $F(r) = -\frac{k}{r^2}$ (force newtonienne)

- Discussion graphique

$$\begin{cases} E_p(r) = -\frac{k}{r} \\ E_{\text{Peff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\sigma^*{}^2}{2\mu r^2} \end{cases}$$



- Si  $k < 0$ , on a un état diffusif, la trajectoire de M est une branche d'hyperbole dont G est un foyer (cf 7.3).
- Si  $k > 0$ , la nature de la trajectoire dépend du signe de l'énergie.
  - $E_0^* \geq 0$  : état diffusif (parabole ou branche d'hyperbole dont G est un foyer)
  - $E_0^* < 0$  : état lié (ellipse dont G est un foyer)

Rem. 1 : pour  $E_0^* < 0$ ,  $k > 0$ , on peut déterminer graphiquement  $r_{\min} = r_P$ , et  $r_{\max} = r_A$  (périhélie et aphélie) ; de plus  $r_0$  est le paramètre p.

Rem. 2 : pour  $E_0^* = E_{PO}$  :  $r = r_0$  : la trajectoire est circulaire de rayon  $r_0 = \frac{\sigma^{*2}}{k\mu}$ .

Comme  $\sigma^* = \mu r_0^2 \dot{\theta} = \mu r_0 v_0$ , on retrouve :

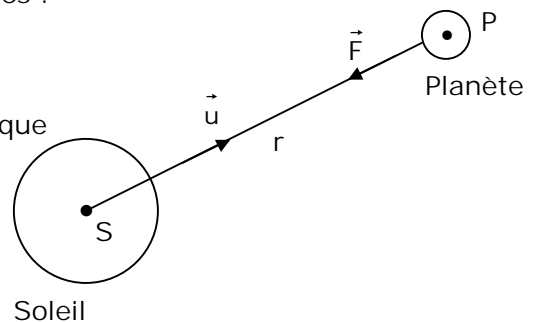
$$r_0 = \frac{(r_0 v_0 \mu)^2}{k\mu} \Rightarrow \boxed{v_0^2 = \frac{k}{\mu r_0}}$$

On retrouve aussi  $E_0^* = -\frac{k^2 \mu}{2 \sigma^{*2}} = -\frac{k}{2 r_0}$  (énergie pour le MCU)

• Exemple 1 : Planètes du Système Solaire

On fait, en cours, les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Système {Soleil + 1 Planète} isolé
- $M_p \ll M_s \Rightarrow \begin{cases} G \approx S, \text{ centre au Soleil} \\ (R_G) \approx (R_S) \text{ référentiel héliocentrique} \\ M \approx P, \text{ centre de la Planète} \end{cases}$
- Le Soleil est à symétrie sphérique



SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

Alors :

$$\vec{F} = -g \frac{M_S M_P}{r^2} \vec{u} \quad \vec{u} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}$$

(Ce résultat nécessite en fait le théorème de Gauss – cf IX, et l’hypothèse de symétrie sphérique pour le Soleil).

D’après VII, le centre P de la Planète décrit donc une conique dont S est un foyer, dans le référentiel de Copernic.

Compte tenu des « conditions initiales » (à la formation du Système Solaire),  $E_0 < 0$ , et cette conique est une ellipse dont S est un foyer (1<sup>ère</sup> loi de Képler).

Cette ellipse est décrite selon la loi des aires (2<sup>e</sup> loi de Képler).

Sa période est :

$$T = 2 \Pi \sqrt{\frac{M_P a^3}{k}} = 2 \Pi \sqrt{\frac{a^3}{g M_S}}$$

(3<sup>e</sup> loi de Képler :  $T^2$  proportionnelle à  $a^3$ )

Rem. 1 : les ellipses décrites par les 9 Planètes du Système Solaire le sont quasiment dans le même plan (plan de l’écliptique), et sont voisines de cercles (la plus excentrique est celle décrite par Mercure :  $e \approx 0,2$ ).

Rem. 2 : En prenant en compte  $M_P$ , on trouve que :  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \Pi^2}{g M_S \left(1 + \frac{M_P}{M_S}\right)}$

(légère correction à la 3<sup>e</sup> loi de Képler ;  $\frac{M_P}{M_S} \leq 10^{-3}$  (pour Jupiter)).

Rem. 3 : en prenant en compte l’influence des autres Planètes, et la non-sphéricité du Soleil :

$$E_P(r) = -\frac{k}{r} + \underbrace{\left(-\frac{k'}{r^3}\right)}$$

Terme correctif dit « quadrupolaire »

On montre alors que l’axe focal de l’ellipse décrite par une Planète tourne lentement dans le même sens que la Planète : c’est le phénomène « d’avance du périhélie » (le périhélie P semble « avancer » lentement sur l’ellipse au cours du temps).

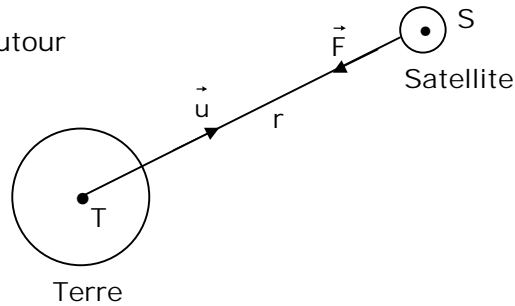
Ce phénomène est le plus marqué pour Mercure :  $\delta \theta \sim 10'$  arc/siècle.

On peut noter qu’il existe aussi une contribution due à la Relativité Générale (43" arc/ siècle) ; cette contribution, en accord remarquable avec les observations astronomiques, conforta le succès et la validité de la théorie einsteinienne.

\*Exemple 2 : satellites artificiels terrestres. On fait des hypothèses simplificatrices analogues à celles faites pour les Planètes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Système \{Terre + Satellite\} isolé} \\ M_S \ll M_T \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G \approx T, \text{ centre de la Terre} \\ (R_G) \approx \text{référentiel géocentrique} \\ M \approx S, \text{ centre d'inertie du satellite} \end{array} \right. \\ \text{La Terre est à symétrie sphérique} \end{array} \right.$$

On étudie donc le mouvement d'un satellite autour de la Terre, dans le référentiel géocentrique.



$$\vec{F} = -g \frac{M_T M_S}{r^2} \vec{u} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}$$

(et  $E_p(r) = -g \frac{M_T M_S}{r} = -\frac{k}{r}$ )

- Si  $E_0 < 0$ , la trajectoire du satellite est donc une ellipse dont T est un foyer, décrite selon la loi des aires, avec la période :

$$T_0 = 2 \Pi \sqrt{\frac{M_S a^3}{k}} = 2 \Pi \sqrt{\frac{a^3}{g M_T}}$$

- Si  $E \geq 0$ , la trajectoire est parabolique ou hyperbolique, il y a « libération » (état « diffusif »). La vitesse initiale critique délimitant les 2 types de trajectoire est appelée vitesse de libération.

Elle correspond à :

$$E_0 = 0 = \frac{1}{2} M_S v_0^2 - \frac{g M_S M_T}{r_0}$$

( $r_0 = r(t = 0)$ )

Donc :

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2 g M_T}{r_0}}$$

**Problème du lancement d'un satellite**

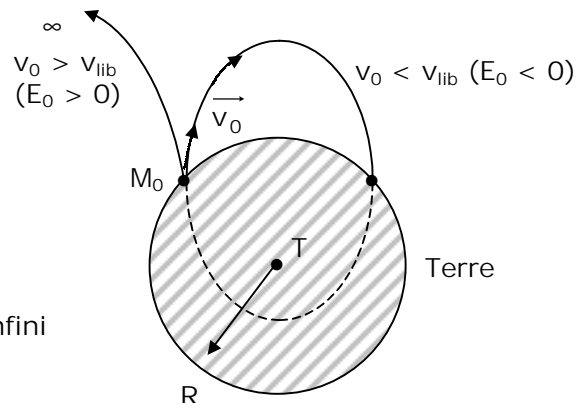
Le lancement du sol est impossible :

-  $v_0 < v_{lib} (sol) = \sqrt{\frac{2 g M_T}{R}} = 11,2 \text{ kms}^{-1}$  :

le satellite retombe sur terre

-  $v_0 > v_{lib} (sol) :$

le satellite échappe à l'attraction terrestre et part à l'infini

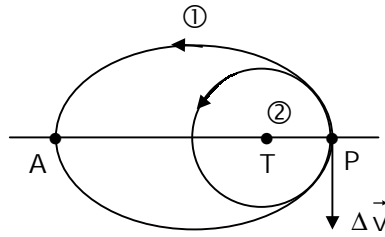


Il faut donc emmener le satellite à une altitude  $z$  (fusée Ariane...) et le lancer à cette altitude à une vitesse  $v_0 < v_{lib}$ .

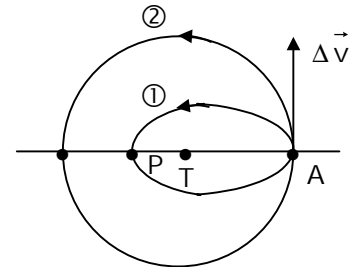
Rem. : on lance les satellites de bases proches de l'équateur (Kourou) pour « profiter » de la rotation terrestre et minimiser l'énergie à apporter pour le lancement (et la masse de propergols consommée).

**Problème du changement d'orbite**

Le passage d'une orbite elliptique à une orbite circulaire se fait à l'aide de moteurs auxiliaires permettant des accroissements ou diminutions de vitesse  $\Delta \vec{v}$  (effectués au périhélie ou à l'aphélie de la trajectoire).

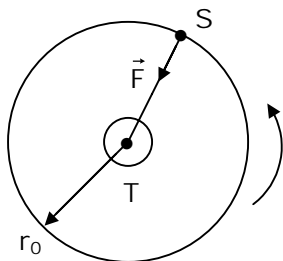


Passage ① → ② :  
Diminution de vitesse  $\Delta V$  en P



Passage ① → ② :  
Accroissement de vitesse  $\Delta V$  en A

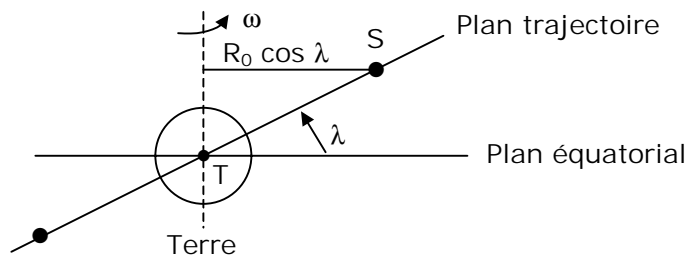
**Cas du satellite circulaire**



$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 = - \frac{g M_T M_S}{2 r_0} \\ E_p = - \frac{g M_T M_S}{r_0} \\ E_c = \frac{g M_T M_S}{2 r_0} = - E_0 \\ v_0 = \sqrt{\frac{g M_T}{r_0}} = \frac{v_{lib}}{\sqrt{2}} \\ T_0 = 2 \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{g M_T}} \end{array} \right.$$

**Cas du satellite circulaire géostationnaire**

Le satellite est immobile pour un observateur terrestre (application aux télécommunications, GPS...).



Soit  $(R_G)$  le référentiel géocentrique « absolu »

$(R')$  référentiel terrestre « relatif »

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

Pour le satellite géostationnaire, on veut :

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \vec{0} \\ \vec{v} &= \vec{v}_e\end{aligned}$$

En particulier :  $\underbrace{\text{trajectoire absolue}}_{\text{cercle de rayon } r_0} \equiv \underbrace{\text{trajectoire d'entraînement}}_{\text{cercle de rayon } r_0 \cos \lambda}$

Il faut donc :  $\cos \lambda = 1$

La trajectoire doit être dans le plan équatorial.

De plus :

$$\begin{cases} v = v_0 = \sqrt{\frac{g M_T}{r_0}} \\ v_e = \omega r_0 \left( \omega = \frac{2 \pi}{J_{\text{sid}}} = \frac{2 \pi}{86164} \text{ s}^{-1} \right) \end{cases}$$

Ainsi :  $\omega r_0 = \sqrt{\frac{g M_T}{r_0}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_0 = \left( \frac{g M_T}{\omega^2} \right)^{1/3} \\ v_0 = (\omega g M_T)^{1/3} \end{cases}$$

A.N. :

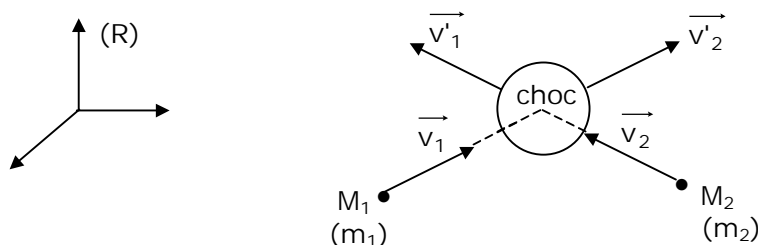
$$\begin{cases} r_0 \approx 42000 \text{ km} \\ (z_0 = r_0 - R \approx 36000 \text{ km}) \\ v_0 \approx 3 \text{ kms}^{-1} \end{cases}$$

### III. Choc de deux points matériels.

On considère un système isolé de deux points matériels, sans interaction autre que le choc, qui a lieu à  $t = 0$ .

Dans (R) galiléen, on connaît leurs vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  juste avant le choc ( $t = 0^-$ ).

On cherche à déterminer leurs vitesses  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$  juste après le choc ( $t = 0^+$ ).



Le système est isolé : il y a conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totale :

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \\ \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 \end{cases}$$

Pour une particule :  $E = E_p + E_c + U$ , où  $U$  est son énergie interne (cf cours de Thermo).  
 Nous supposons que la seule énergie potentielle à prendre en compte est celle de pesanteur.  
 Le choc étant très bref :

$$E_p = E'_p$$

Nous nous limiterons de plus au cas d'une collision élastique, pour laquelle :

$$U = U'$$

(Le choc conserve l'énergie interne de la particule, on néglige donc tout terme dissipatif provoquant un échauffement, donc une modification de  $U$ ). Un choc élastique conserve donc l'énergie cinétique du système.

On aura alors :

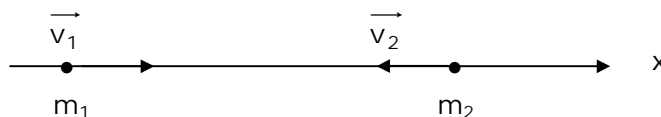
$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \end{cases}$$

On voit que le problème est indéterminé (6 inconnues  $v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{1z}, v'_{2x}, v'_{2y}, v'_{2z}$  et 4 équations).

Nous nous limiterons donc à 2 cas simples.

### III.1. Choc élastique direct : toutes les vitesses sont colinéaires :

$$\vec{v}_i = v_i \vec{x} : \vec{v}_i' = v_i' \vec{x} \quad (v_i, v_i' > 0 \text{ ou } < 0)$$



Alors :

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' & (1) \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 & (2) \end{cases}$$

ou encore :

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \quad (1)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) & (1) \\ v_1 + v_1' = v_2 + v_2' & \frac{(2)}{1} \end{cases}$$

On obtient ainsi :

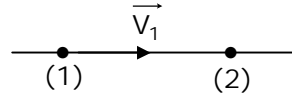
$$\begin{cases} v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' = \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$



Cas particuliers :

- $\vec{v}_2 = \vec{0}$  ((1) « projectile », (2) « cible »)

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v'_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 > 0 \end{cases}$$



- $m_1 > m_2$  :  $v'_1 > 0$  (Si  $m_1 \gg m_2$  :  $v'_1 \approx v_1$  ;  $v'_2 \approx 2 v_1$ )
- $m_1 < m_2$  :  $v'_1 < 0$  (Si  $m_1 \ll m_2$  :  $v'_1 \approx -v_1$  ;  $v'_2 \approx 0$ )
- $m_1 = m_2$  :  $v'_1 = 0$  « carreau »  
 $v'_2 = v_2$

- $m_2 \gg m_1$  :  $v'_1 \approx -v_1 + 2 v_2$   
 $v'_2 \approx v_1$

### III.2. Choc élastique sur une paroi fixe ( $m_2 \gg m_1$ ).

On a ici :

$$\begin{cases} v_2 = v'_2 = 0 \\ m_2 = M \gg m_1 = m \end{cases}$$

Par conservation de l'énergie cinétique :

$$v_1 = v'_1$$

Par conservation de la quantité de mouvement :

$$\underbrace{m \vec{v}_1}_{\vec{P}_1} = \underbrace{m \vec{v}'_1}_{\vec{P}'_1} + \vec{P}$$

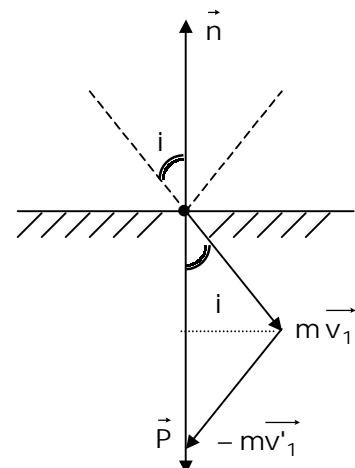
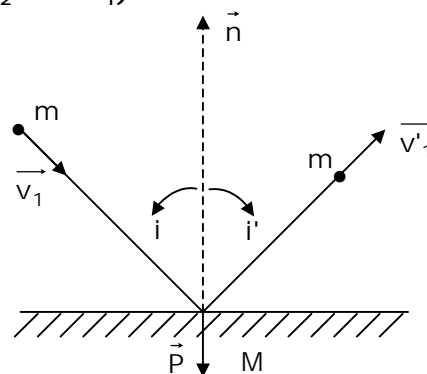
$\vec{P}$  est la quantité de mouvement reçue par la paroi pour un choc.

Donc :

$$\vec{P} = m (\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)$$

Nous admettrons que, pour un choc élastique, la force subie par la paroi est une force de pression :  $\vec{P}$  est donc normale à la paroi, ce qui implique  $i' = i$  (loi de Descartes pour la « réflexion » de la particule (1)).

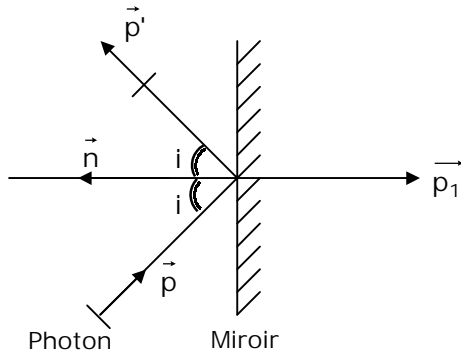
Alors :



$$\vec{P} = - 2 m v_1 \cos i \vec{n}$$

Application : « pression de radiation »

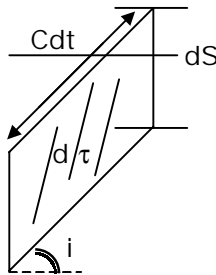
Considérons un faisceau lumineux se réfléchissant sur un métal parfait sous incidence  $i$ . Avec le modèle corpusculaire, cette réflexion correspond à des chocs élastiques de photons. Un photon possède une énergie  $E = h\nu$  et une quantité de mouvement  $p = \frac{h\nu}{c}$ .



Pour le choc d'un photon, la paroi reçoit la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_1 = - 2 \left( \frac{h\nu}{c} \right) \cos i \vec{n}$$

Si le faisceau lumineux possède une densité de photon  $n$ , le nombre de photons choquant un élément de surface  $dS$  du miroir pendant  $dt$  est :



$$d^2N = n \underbrace{(c dt dS \cos i)}_{d\tau}$$

Le transfert de quantité de mouvement associé est :

$$d^2 \vec{p} = d^2 N \vec{p}_1 = - 2 n h \nu \cos^2 i dS dt \vec{n}$$

La force  $d\vec{F}$  subie par  $dS$  est donc :

$$d\vec{F} = \frac{d^2 \vec{p}}{dt} = 2 n h \nu \cos^2 i dS (-\vec{n})$$

Il s'agit bien d'une force de pression, cette pression est appelée pression de radiation :

$$P = 2 (n h \nu) \cos^2 i$$

Comme  $n h \nu = u$ , énergie volumique du faisceau incident, on a finalement :

$$P = 2 u \cos^2 i \quad (P \text{ proportionnelle à } u)$$

On voit que  $P$  est maximale sous incidence normale ( $i = 0$ ), et nulle sous incidence rasante ( $i = \Pi/2$ ).

Cette pression est négligeable pour les sources lumineuses usuelles, très importante pour le rayonnement solaire par exemple (orientation de la queue des comètes en sens opposé du rayonnement solaire, voiles solaires...).